数学分析 B2 第 7 次习题课讲义

宗语轩

2022 春, USTC

1 作业选讲

11.7.11 设函数 $Q(x,y)$ 在 Oxy 平面上具有一阶连续偏导数, 曲线积分 $\int_L 2xy\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y$ 与路径无关, 并且对任意 t 恒有 $\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xy\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xy\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y$, 求 $Q(x,y)$.

解. 令 $\boldsymbol{v}=2xy\boldsymbol{i}+Q(x,y)\boldsymbol{j}:=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}$. 由题意知,

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=Q'_x-2x=0.$$

解得 $Q(x,y)=x^2+f(y)$, 故

$$\int_{(0,0)}^{(x,y)} \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_0^y (x^2+f(y))\,\mathrm{d}y = x^2y+\int_0^y f(y)\,\mathrm{d}y.$$

故对任意 t 恒有

$$t^2+\int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y = t+\int_0^t f(y)\,\mathrm{d}y.$$

上式两边对 t 求导, 得:

$$2t=1+f(t) \implies f(t)=2t-1.$$

故

$$Q(x,y)=x^2+2y-1.$$

□

[0] 个人主页: http://home.ustc.edu.cn/~zyx240014/.

发现错误欢迎联系: zyx240014@mail.ustc.edu.cn.

思考题 试举例说明在有限区间上可积但不是绝对可积的函数.

分析. 如果是在 Riemann 积分的意义下, 函数在有限区间上可积必定绝对可积 (请读者自行思考). 因此这里我们考虑存在瑕点的情形. 在 Riemann 积分的意义下如果函数可积, 则函数必须满足有界性, 但对于瑕积分而言可以突破这一限制. 可积在某种程度上相当于积分收敛, 不可积相当于积分发散或者不存在. 回忆我们在数项级数中收敛但不绝对收敛的例子, 由此构造出函数, 使其积分后变成类似于该数项级数的形式.

解. 构造 $[0,1]$ 上的函数

$$f(x)=\begin{cases}(-1)^n n, & \dfrac{1}{n+1}<x\leqslant\dfrac{1}{n},\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

一方面,

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}.$$

由 Leibniz 判别法知, 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ 收敛, 即 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ 可积.
另一方面,

$$\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} |f(x)|\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}=+\infty.$$

所以 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ 不绝对可积. □

注. 其他正确的例子:

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x,\quad x\in[0,1];$$

但像

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\in[-1,0)\cup(0.1]\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

在 $[-1,1]$ 上并不可积, $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上根本不满足可积性.

综合习题 12 T4 设 f 是周期为 2π 且在 $[-\pi,\pi]$ 上 Riemann 可积的函数. 如果它在 $(-\pi,\pi)$ 上单调, 证明:

$$a_n=O\left(\frac{1}{n}\right),\quad b_n=O\left(\frac{1}{n}\right).$$

证明. 为了方便题目求解, 这里我们用 $f(-\pi)$ 代替 $f(-\pi^+)$, 用 $f(\pi)$ 代替 $f(\pi^-)$. 不妨 $f(x)$ 单调递减, 令 $x_k=(2k-n)\pi,\ n=0,1,\cdots,n$. 则有

$$\begin{aligned}
na_n &= \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-n\pi}^{n\pi} f\left(\frac{x}{n}\right)\cos x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left(f\left(\frac{x}{n}\right)-f\left(\frac{x_k}{n}\right)\right)\cos x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x_k}{n}\right)\int_{x_k}^{x_{k+1}}\cos x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left(f\left(\frac{x}{n}\right)-f\left(\frac{x_k}{n}\right)\right)\cos x\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

因为 $f(x)$ 单调递减, 故有

$$\begin{aligned}
|na_n| &\leqslant \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left(f\left(\frac{x_k}{n}\right)-f\left(\frac{x}{n}\right)\right)|\cos x|\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left(f\left(\frac{x_k}{n}\right)-f\left(\frac{x_{k+1}}{n}\right)\right)\mathrm{d}x \\
&= 2\sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{x_k}{n}\right)-f\left(\frac{x_{k+1}}{n}\right)\right) \\
&= 2(f(-\pi)-f(\pi)).
\end{aligned}$$

因此 $\{na_n\}$ 有界. 同理 $\{nb_n\}$ 有界, 故命题成立. □

注. 本题也可以用第二积分平均值定理完成. 存在 $\xi\in[-\pi,\pi]$, 使得

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}f(-\pi)\int_{-\pi}^{\xi}\cos nx\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}f(\pi)\int_{\xi}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n\pi}(f(-\pi)-f(\pi))\sin n\xi.
\end{aligned}$$

所以 $\{na_n\}$ 有界.

2 场的数学与曲线曲面积分

注. 这里我们只考虑三维欧式空间的情形.

2.1 基本概念、性质与定理回顾

在直角坐标系下, 已知数量场 $\varphi(x,y,z)$ 和向量场 $\boldsymbol{v}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$.

定义 2.1.1. 一些记号的定义:

1. **Nabla 算子**: $\nabla := \dfrac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\dfrac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$;
2. 数量场 φ 的**梯度**: $\mathbf{grad}\,\varphi := \nabla\varphi = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}$;
3. 向量场 $\boldsymbol{v}$ 的**散度**: $\operatorname{div}\boldsymbol{v} := \nabla\cdot\boldsymbol{v} = \dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}$;
4. 向量场 $\boldsymbol{v}$ 的**旋度**: $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} := \nabla\times\boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\dfrac{\partial R}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\dfrac{\partial P}{\partial z}-\dfrac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$;
5. **Laplace 算子**: $\Delta := \nabla\cdot\nabla = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$, 作用在 φ 上: $\Delta\varphi = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$.

注. 算子 ∇ 兼有微商和向量两种运算属性, 与数量场的" 数乘" 给出了数量场的梯度, 与向量场的" 点乘" 和" 叉乘" 分别给出了向量场的散度和旋度, 与自身" 点乘" 得到新算子 Δ . 因此一个数量场的梯度是一个向量场, 一个向量场的散度是一个数量场, 一个向量场的旋度是一个向量场.

Nabla 算子满足如下性质和运算规则:

命题 2.1.1. 设 φ,ψ 是光滑的数量场, $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是光滑的向量场, 则有

$$\nabla(\varphi+\psi)=\nabla\varphi+\nabla\psi, \tag{1}$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\nabla\cdot\boldsymbol{a}+\nabla\cdot\boldsymbol{b}, \tag{2}$$

$$\nabla \times (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \nabla \times \boldsymbol{a} + \nabla \times \boldsymbol{b}, \tag{3}$$

$$\nabla(\varphi\psi) = \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi, \tag{4}$$

$$\nabla \cdot (\varphi\boldsymbol{a}) = \varphi\nabla\cdot\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\cdot\nabla\varphi, \tag{5}$$

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b}\cdot\nabla\times\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}\cdot\nabla\times\boldsymbol{b}, \tag{6}$$

$$\nabla \times (\varphi\boldsymbol{a}) = \nabla\varphi\times\boldsymbol{a} + \varphi\nabla\times\boldsymbol{a}, \tag{7}$$

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{grad}\,\varphi = \nabla\times\nabla\varphi = \mathbf{0}, \tag{8}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{a} = \nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a}) = 0, \tag{9}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{a}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{a}) - \Delta\boldsymbol{a} \tag{10}$$

下面给出性质 (8)、(9)、(10) 的证明, 其余性质请读者自证.

证明. 设 $\boldsymbol{a}(x,y,z) = P(x,y,z)\boldsymbol{i} + Q(x,y,z)\boldsymbol{j} + R(x,y,z)\boldsymbol{k}$. 则有

$$\begin{aligned}
\nabla\times\nabla\varphi &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}\right)\boldsymbol{k} \\
&= 0, \\
\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a}) &= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2 R}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial z}\right) + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y\partial x}\right) + \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z\partial y}\right) \\
&= 0, \\
\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{a}) &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z} & \dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x} & \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 R}{\partial z\partial x}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial^2 R}{\partial z\partial y} + \frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y\partial z}\right)\boldsymbol{k} \\
&\quad - \left(\left(\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y^2}\right)\boldsymbol{k}\right) \\
&= \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 R}{\partial z\partial x}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial z\partial y} + \frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial^2 R}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y\partial z}\right)\boldsymbol{k} \\
&\quad - \left(\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial^2 R}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y^2}\right)\boldsymbol{k}\right)
\end{aligned}$$

$$= \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{a}) - \Delta \boldsymbol{a}.$$

□

注. 以上性质又一次表明了算子 ∇ 兼有微商和向量两种运算属性. 在一定条件下 ∇ 可以 "看成" 向量, 因为以上性质和运算规则中大多数都在向量运算下成立. 但由于 ∇ 兼有微商性质而带来的影响, 也有少部分在向量运算下成立的性质在这里不成立以及少部分上述有关 ∇ 的性质在向量运算下不成立. 具体留给读者自行品味, 这里不再赘述.

在曲线积分和曲面积分中, Gauss-Stokes 公式揭示了曲线积分、曲面积分和重积分间的联系. 我们在下面给出该公式 (具体的使用条件和范围请自行参考教材, 这里不再详细给出):

定理 2.1.1 (**Gauss-Stokes 公式**).

1. **Green 公式 (一维平面曲线积分 $\Longleftrightarrow$ 二维重积分)**: 设 $L = \partial D$ 是平面封闭曲线, 方向逆时针, 则有
$$\oint_L \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y;$$
2. **Gauss 公式 (二维空间曲面积分 $\Longleftrightarrow$ 三维重积分)**: 设 $S = \partial V$ 是空间封闭曲面, 方向外侧, 则有
$$\oiint_S P\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$
或
$$\oiint_S \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oiint_S \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V = \iiint_V \mathrm{div}\,\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V$$
3. **Stokes 公式 (一维空间曲线积分 $\Longleftrightarrow$ 二维空间曲面积分)**: 设 $L = \partial S$ 是空间封闭曲线且是空间曲面 S 的边缘, 方向与 S 的方向协调, 则有
$$\begin{aligned}&\oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z \\ &= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y\end{aligned}$$
或
$$\oint_L \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_S \nabla \times \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_S \mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

注. 关于 Gauss-Stokes 公式的使用说明:

1. 可以把 Gauss-Stokes 公式推广到更一般的情形中. 类似教材**习题 11.3.7**, 我们也有 (一维平面" 类" 曲线积分 $\Longleftrightarrow$ 二维重积分) 情况下的 **"Gauss" 公式**:

$$\oint_L \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = \iint_D \nabla\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D \operatorname{div}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

2. 若向量场 $\boldsymbol{v}$ 在区域内存在奇点 (即 $\boldsymbol{v}$ 在该点无定义), 由于定理条件的限制, 我们不能直接使用 Green 和 Gauss 定理, 但我们可以通过挖去一个以该点为中心, 半径为 r 的圆/球, 并让 r 充分小. 在剩余部分区域中, 向量场 $\boldsymbol{v}$ 满足了 Green 和 Gauss 定理的条件, 使用后再补上挖去部分的相应积分值即可. 具体详见教材**例 11.3.6** 和**习题 11.5.3**.

应用 Green 定理, 我们可以直接计算区域的面积. 具体如下:

命题 2.1.2. 设 D 是满足 Green 定理中条件的区域, $\sigma(D)$ 表示 D 的面积, ∂D 为 D 的分段光滑的边界, 则

$$\sigma(D) = \frac{1}{2}\oint_{\partial D}(-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y) = \oint_{\partial D}(-y)\,\mathrm{d}x = \oint_{\partial D} x\,\mathrm{d}y.$$

下面我们讨论空间向量场 $\boldsymbol{v}$ 的曲线积分与路径的相关性问题. 首先给出如下定义:

定义 2.1.2. 设 $\boldsymbol{v} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$ 是连通区域 V 内的光滑向量场.

1. 若 $\boldsymbol{v}$ 在 V 内的曲线积分与路径无关, 只与起点和终点有关 (环量为 0), 则称 $\boldsymbol{v}$ 是 V 内的**保守场**;

2. 若存在数量场 φ, 使得 $\boldsymbol{v} = \nabla\varphi$, 则称 $\boldsymbol{v}$ 是**有势场**, 并称 φ 是 $\boldsymbol{v}$ 的**势函数**;

3. 若存在向量场 $\boldsymbol{\alpha}$, 使得 $\boldsymbol{v} = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{\alpha} = \nabla\times\boldsymbol{\alpha}$, 则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{v}$ 的**向量势**;

4. 若 $\boldsymbol{v}$ 满足 $\nabla\times\boldsymbol{v} = 0$, 则称 $\boldsymbol{v}$ 是**无旋场**;

5. 若 $\boldsymbol{v}$ 满足 $\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0$, 则称 $\boldsymbol{v}$ 是**无源场**.

接上, 我们有如下性质:

定理 2.1.2.

1. $\boldsymbol{v}$ 是保守场 $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{v}$ 是有势场;

2. 若 $V\subset\mathbb{R}^3$ 是曲面单连通区域, 则 $\boldsymbol{v}$ 是保守场 $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{v}$ 是无旋场;

3. $\boldsymbol{v}$ 是无源场 $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{v}$ 在 V 中任何一点的局部存在向量势.

注. 通过上述定理, 我们得到:

1. 势函数的计算可通过特殊路径得到 (如折线或直线, 路径不唯一), 或求解方程
$$P=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad Q=\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad R=\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$
2. 保守场的曲线积分只与起点和终点有关, 且
$$\int_{L_{AB}}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_A^B\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_A^B\mathrm{d}\varphi=\varphi(B)-\varphi(A).$$
其中, φ 是 $\boldsymbol{v}$ 的一个势函数, 且满足
$$\mathrm{d}\varphi=\nabla\varphi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$
3. 向量势在相差一个函数的梯度意义下是唯一的. 我们可以通过如下方法构造向量势: 已知 $\boldsymbol{v}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$, 求 $\boldsymbol{\alpha}=A\boldsymbol{i}+B\boldsymbol{j}+C\boldsymbol{k}$, 使得 $\boldsymbol{v}=\nabla\times\boldsymbol{\alpha}$ 等价于求解下列一阶微分方程:
$$\begin{cases}\dfrac{\partial C}{\partial y}-\dfrac{\partial B}{\partial z}=P(x,y,z),\\ \dfrac{\partial A}{\partial z}-\dfrac{\partial C}{\partial x}=Q(x,y,z),\\ \dfrac{\partial B}{\partial x}-\dfrac{\partial A}{\partial y}=R(x,y,z).\end{cases}$$
4. 关于平面向量场 $\boldsymbol{v}$ 的曲线积分与路径的相关性问题亦有类似的结果, 讨论详见教材**定理 11.7** 和 **定理 11.8**.

以上具体过程和例子参考教材 **11.7 节**.

我们还有如下形式的曲线、曲面积分:
$$\int_L\varphi\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_L\varphi\boldsymbol{\tau}\,\mathrm{d}s,$$
$$\int_L\mathrm{d}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}=\int_L\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}s,$$
$$\iint_S\varphi\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint_S\varphi\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S,$$
$$\iint_S\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{v}=\iint_S\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}S.$$
其中 $\boldsymbol{\tau}$ 表示曲线的单位切向量, $\boldsymbol{n}$ 是曲面 S 的单位法向量.

上述曲线、曲面积分满足的 Gauss 和 Stokes 公式如下:

定理 2.1.3. 设 S 是空间中逐段光滑有界曲面, S 的边界 ∂S 是逐段光滑封闭曲线, 则

$$\oint_{\partial S} \varphi\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S} \times \nabla\varphi,$$
$$\oint_{\partial S} \mathrm{d}\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = \iint_S (\mathrm{d}\boldsymbol{S} \times \nabla) \times \boldsymbol{v}.$$

定理 2.1.4. 设 V 是空间有界区域, V 的边界 ∂V 是逐段光滑封闭曲面, 则

$$\oiint_{\partial V} \varphi\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_V \nabla\varphi\mathrm{d}\boldsymbol{V},$$
$$\oiint_{\partial V} \mathrm{d}\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{v} = \iiint_V \nabla \times \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V.$$

利用**定理 2.1.3** 和**定理 2.1.4**, 我们可以给出下列**梯度、散度和旋度的积分表示**:

命题 2.1.3. 设 φ 和 $\boldsymbol{v}$ 分别是一个数量场和向量场, V 是空间有界区域. 则对 V 内任意一点 P, 有

$$\nabla\varphi = \lim_{V\to P}\left(\frac{1}{\sigma(V)}\oiint_{\partial V} \varphi\mathrm{d}\boldsymbol{S}\right),$$
$$\nabla\cdot\boldsymbol{v} = \lim_{V\to P}\left(\frac{1}{\sigma(V)}\oiint_{\partial V} \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\right),$$
$$\nabla\times\boldsymbol{v} = \lim_{V\to P}\left(\frac{1}{\sigma(V)}\oiint_{\partial V} \mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{v}\right),$$

其中 $\lim\limits_{V\to P}$ 表示区域 V 收缩到 P 点, $\sigma(V)$ 表示 V 的体积.

具体细节留给读者自证. 由此可知, 按积分定义数量场的梯度和向量场的散度、旋度不受坐标系选取的限制. 以上具体内容参考教材 **11.6 节**.

2.2 曲线积分的应用——等周问题

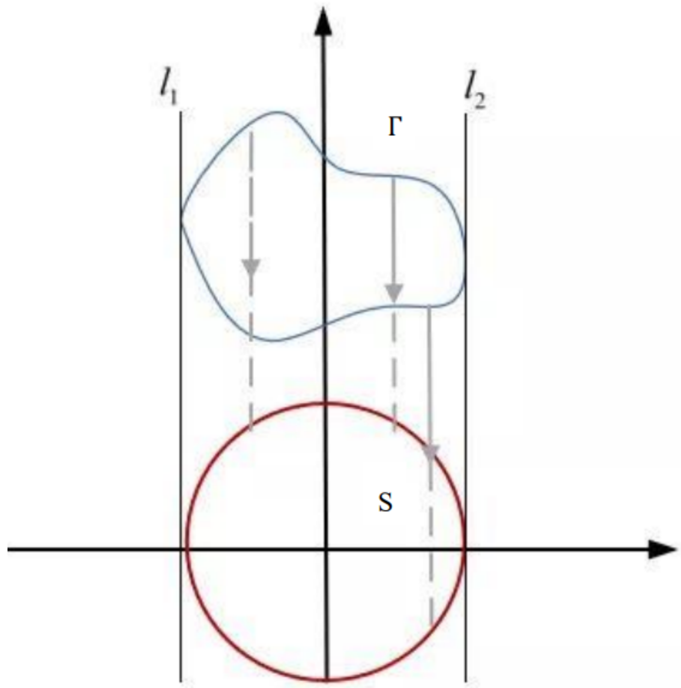
等周问题最早是由古希腊数学家 Pappus 提出的, 这一问题表述为: 在周长相等的一切封闭且不自相交的曲线中, 什么样的曲线包围的图形具有最大的面积?

在当时, 很多人就已经判断出这样的闭曲线应为圆周, 但这一事实的严格证明还是最早在 19 世纪得到的. 这里我们仅讨论简单光滑曲线的情况:

定理 2.2.1 (等周问题). 设 $\mathit{\Gamma}$ 是平面上长度为 L 的简单光滑闭曲线, A 是 $\mathit{\Gamma}$ 围成平面区域的面积, 证明:

$$A \le \frac{L^2}{4\pi}.$$

并问等号成立时, 曲线的具体形状.



证明 (**Schmidt**). 取 Γ 的一对平行切线 l_1, l_2, 使得 Γ 夹在 l_1, l_2 中. 再取一圆周 S, 使得 S 亦夹在 l_1, l_2 中. 取 S 的圆心为坐标原点, x 轴垂直于 l_1, l_2. 设 $x = x(s), y = y(s)$ 是 Γ 的弧长参数方程, 以逆时针方向为曲线的正向, $0 \leqslant s \leqslant L$, 其中 x, y 是 s 的连续可微函数. 设 l_1, l_2 与 Γ 的两个切点参数值分别为 $s = t$ 和 $s = 0$. 由 Green 公式知,

$$A = \oint_{\Gamma} x \, \mathrm{d}y = \int_0^L x(s) y'(s) \, \mathrm{d}s.$$

设圆 S 的半径为 r, 定义

$$y_0(s) = \begin{cases} \sqrt{r^2 - x^2(s)}, & 0 \leqslant s \leqslant t, \\ -\sqrt{r^2 - x^2(s)}, & t \leqslant s \leqslant L, \end{cases}$$

则方程 $x = x(s), y = y_0(s), 0 \leqslant s \leqslant L$ 形成的轨迹和 S 重合. 由定积分的定义知,

$$\int_0^L y_0(s) x'(s) \, \mathrm{d}s = \int_0^t y_0(s) x'(s) \, \mathrm{d}s + \int_t^L y_0(s) x'(s) \, \mathrm{d}s = -\frac{\pi r^2}{2} - \frac{\pi r^2}{2} = -\pi r^2.$$

由于 s 是 Γ 的弧长参数, 故有 $(x'(s))^2 + (y'(s))^2 \equiv 1, 0 \leqslant s \leqslant L$. 利用 Cauchy 不等式得

$$A + \pi r^2 = \int_0^L (x(s) y'(s) - y_0(s) x'(s)) \, \mathrm{d}s \leq \int_0^l |(-y_0(s), x(s)) \cdot (x'(s), y'(s))| \mathrm{d}s$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \int_0^L \sqrt{(-y_0(s))^2+(x(s))^2}\cdot\sqrt{(x'(s))^2+(y'(s))^2}\,\mathrm{d}s \\
&= r\int_0^L \mathrm{d}s = Lr.
\end{aligned}
$$

由均值不等式得

$$\sqrt{A\cdot\pi r^2}\leqslant\frac{A+\pi r^2}{2}\leqslant\frac{Lr}{2}.$$

即

$$A\leqslant\frac{L^2}{4\pi}$$

取等时, $A=\pi r^2$, 即 $L=2\pi r$. 由 Cauchy 不等式取等条件有

$$(-y_0(s),x(s))=c(s)(x'(s),y'(s)),$$

故 $\sqrt{x^2(s)+y_0^2(s)}=r=|c(s)|$, 即 $c(s)=\pm r$. 由 $x(s),y_0(s)$ 的连续性知, $c(s)$ 为常数. 故

$$(-y_0(s),x(s))=\pm r(x'(s),y'(s)). \tag{11}$$

从 S 的极坐标表达式 $x=r\cos\theta,\quad y_0=r\sin\theta,\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}=-r\sin\theta=-y_0,\quad \frac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}\theta}=r\cos\theta=x.$$

代入 (11) 得

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta},\frac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}\theta}\right)=\pm\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s},\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right). \tag{12}$$

故 $\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}=\pm\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$. 利用一阶微分形式不变性得

$$r\mathrm{d}\theta=\pm\mathrm{d}s.$$

再代回 (12), 得

$$\frac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}.$$

故

$$y_0(s)=y(s)+C,$$

其中 C 是与 S 无关的常数. 因此 Γ 与 S 差一个沿 y 方向的平移. 故取等时 Γ 必定是半径为 $r=\dfrac{L}{2\pi}$ 的圆周. □

另证 (Hurwitz). 我们从曲线 $\varGamma$ 上一点开始, 以逆时针方向计算弧长 s. 设 $x=x(s), y=y(s)$ 是 $\varGamma$ 的弧长参数方程, $0 \leqslant s \leqslant L$, 其中 x, y 是 s 的连续可微函数. 则

$$x(L)=x(0), \quad y(L)=y(0), \quad (x'(s))^2+(y'(s))^2=1.$$

作变换 $t=\dfrac{2\pi s}{L}-\pi$, 并设 $x=x(s)=\varphi(t), y=y(s)=\psi(t), -\pi \leqslant t \leqslant \pi$. 则

$$\varphi(\pi)=\varphi(-\pi), \quad \psi(\pi)=\psi(-\pi).$$

且参数 t 增加的方向是曲线的逆时针方向. 利用

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}\psi(t)}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}, \quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=\frac{2\pi}{L}.$$

有

$$(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2=\frac{L^2}{4\pi^2}. \tag{13}$$

分别对 $\varphi(t), \psi(t)$ 进行 Fourier 展开

$$\begin{aligned}\varphi(t)&=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nt+b_n\sin nt,\\ \psi(t)&=\frac{c_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} c_n\cos nt+d_n\sin nt.\end{aligned}$$

我们可知

$$\begin{aligned}\varphi'(t)&=\sum_{n=1}^{\infty} nb_n\cos nt-na_n\sin nt,\\ \psi'(t)&=\sum_{n=1}^{\infty} nd_n\cos nt-nc_n\sin nt.\end{aligned}$$

这是因为

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi'(t)\cos nt\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\varphi(t)\cos nt\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sin nt\,\mathrm{d}t=nb_n.$$

其他系数类似可得. 利用 Parseval 等式, 得

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}((\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2)\,\mathrm{d}t&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\varphi'(t))^2\,\mathrm{d}t+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\psi'(t))^2\,\mathrm{d}t\\ &=\sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2+b_n^2)+\sum_{n=1}^{\infty} n^2(c_n^2+d_n^2)\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2).$$

利用 (13), 得

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} ((\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{L^2}{4\pi^2}\,\mathrm{d}t = \frac{L^2}{2\pi}.$$

以上两式联立, 得

$$L^2 = 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2).$$

利用 Green 公式和 Parseval 等式的推论, 得

$$A = \oint_{\Gamma} x\,\mathrm{d}y = \int_0^L \varphi(t)\psi'(t)\,\mathrm{d}t = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n d_n - b_n c_n).$$

因此, 我们有

$$\begin{aligned} L^2 - 4\pi A &= 2\pi^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) - \sum_{n=1}^{\infty} 2n(a_n d_n - b_n c_n) \right) \\ &= 2\pi^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} ((na_n - d_n)^2 + (nc_n + b_n)^2) + \sum_{n=1}^{\infty} (n^2-1)(b_n^2 + d_n^2) \right) \\ &\geqslant 0. \end{aligned}$$

即

$$A \leqslant \frac{L^2}{4\pi}.$$

等号成立当且仅当求和项中所有项均为 0, 即

$$na_n = d_n, \quad nc_n = -b_n, \quad n \geqslant 1.$$
$$b_n = d_n = 0, \quad n \geqslant 2.$$

因此

$$a_1 = d_1, \quad c_1 = -b_1, \quad a_n = b_n = c_n = d_n = 0 \ (n \geqslant 2).$$

故曲线 Γ 的参数方程是

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + b_1 \sin t, \\ y(t) &= \frac{c_0}{2} - b_1 \cos t + a_1 \sin t. \end{aligned}$$

联立得

$$\left(x(t) - \frac{a_0}{2} \right)^2 + \left(y(t) - \frac{c_0}{2} \right)^2 = a_1^2 + b_1^2.$$

因此曲线 Γ 的轨迹是圆. □

其他证法具体可以参考《**数学分析教程 下册**》**11.4 节**.

2.3 场论的应用——调和函数

设有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $\partial\Omega$ 是分片光滑的曲面, $u(x,y,z)$ 是 Ω 上的函数. 如果在 Ω 内满足 $\Delta u = 0$, 则称 u 是 Ω 上的调和函数 (即 u 满足 Laplace 方程).

调和函数有一些非常特殊的性质, 这里我们列举其中重要的性质, 其他具体内容会在后续的 (偏) 微分方程或数理方程课程中详细给出.

研究调和函数的性质需要用到两个 Green 恒等式, 具体内容如下:

引理 2.3.1 (**第一 Green 恒等式**). 设函数 u, v 在 $\overline{\Omega}$ 上有连续的二阶偏导数, 则有

$$\oiint_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S = \iiint_{\Omega} v\Delta u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \iiint_{\Omega} \nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量.

提示. 利用 Gauss 公式即可.

注. 以下两式较为常用:

1. 对上式令 $v = 1$, 则有
$$\oiint_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S = \iiint_{\Omega} \Delta u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

2. 对上式令 $v = u$, 则有
$$\oiint_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S = \iiint_{\Omega} u\Delta u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \iiint_{\Omega} |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

引理 2.3.2 (**第二 Green 恒等式**). 设函数 u, v 在 $\overline{\Omega}$ 上有连续的二阶偏导数, 则有

$$\oiint_{\partial\Omega} \left(v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S = \iiint_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量.

注. 第二 Green 恒等式曾在作业中出现过 (平面情形下), 详见教材**习题 11.3.7**. 当然也可以用第一 Green 恒等式直接推得.

两个 Green 恒等式在场论和曲线曲面积分中是非常常用的工具, 建议读者熟练掌握.

例 2.3.1. 设函数 u 在 $\overline{\Omega}$ 上有连续的二阶偏导数, 则微分方程

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x,y,z) \in \Omega \\ u\Big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

只有零解.

证明. 利用第一 Green 恒等式, 我们有

$$\oiint_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \,\mathrm{d}S = \iiint_{\Omega} u\Delta u \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \iiint_{\Omega} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量. 利用题干中方程满足的条件, 得

$$\iiint_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{\Omega} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 0.$$

因为 u 在 $\overline{\Omega}$ 上有连续的二阶偏导数, 所以

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

即 u 在 Ω 上恒为常数. 又因为 u 在 $\partial\Omega$ 上恒为 0, 由 u 的连续性知, u 在 Ω 上恒为 0. □

调和函数有非常好的平均值性质, 它在任一球面上的曲面积分的平均值等于它在球心处的函数值. 具体内容叙述如下:

定理 2.3.3 (调和函数平均值定理). 记 $B_r(P_0)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中以 P_0 为球心, r 为半径的球, 设函数 u 在 $\overline{B_r(P_0)}$ 上有连续的二阶偏导数, 且满足 $\Delta u = 0$. 则有

$$u(P_0) = \frac{1}{4\pi r^2} \oiint_{\partial B_r(P_0)} u(x,y,z)\mathrm{d}S = \frac{1}{4\pi r^2} \oiint_{\partial B_r(P_0)} u(P)\mathrm{d}S.$$

其中 $P \in \partial B_r(P_0)$.

证明. 对 $\forall\, 0 < \rho \leqslant r$, 由 Gauss 公式, 得

$$\oiint_{\partial B_\rho(P_0)} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \,\mathrm{d}S = \oiint_{\partial B_\rho(P_0)} \nabla u \cdot \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}S = \iiint_{B_\rho(P_0)} \Delta u \,\mathrm{d}V = 0$$

在球面 $\partial B_\rho(P_0)$ 上任何一点 P 满足 $P = P_0 + \rho\boldsymbol{n}$, 即

$$x = x_0 + \rho a, \quad y = y_0 + \rho b, \quad z = z_0 + \rho c,$$

其中 $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$ 是 P 的单位法向量 (在 $\partial B_1(O)$ 上). 故有

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}(P)=\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}(x,y,z)=\nabla u(x,y,z)\cdot \boldsymbol{n}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}u(x_0+\rho a,y_0+\rho b,z_0+\rho c)$$

因此

$$\begin{aligned}0&=\oiint_{\partial B_\rho(P_0)}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}(x,y,z)\mathrm{d}S=\rho^2\oiint_{\partial B_1(O)}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}(x_0+\rho a,y_0+\rho b,z_0+\rho c)\mathrm{d}S\\&=\rho^2\oiint_{\partial B_1(O)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}u(x_0+\rho a,y_0+\rho b,z_0+\rho c)\mathrm{d}S\\&=\rho^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\oiint_{\partial B_1(O)}u(x_0+\rho a,y_0+\rho b,z_0+\rho c)\mathrm{d}S\end{aligned}$$

(这里交换积分和求导次序的合理性可以参考教材第 13 章)
即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\oiint_{\partial B_1(O)}u(x_0+\rho a,y_0+\rho b,z_0+\rho c)\mathrm{d}S=0.$$

再换元回去, 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\frac{1}{\rho^2}\oiint_{\partial B_\rho(P_0)}u(x,y,z)\mathrm{d}S\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\oiint_{\partial B_1(O)}u(x_0+\rho a,y_0+\rho b,z_0+\rho c)\mathrm{d}S=0.$$

从而有

$$\frac{1}{\rho^2}\oiint_{\partial B_\rho(P_0)}u(x,y,z)\mathrm{d}S=\frac{1}{r^2}\oiint_{\partial B_r(P_0)}u(x,y,z)\mathrm{d}S$$

利用 (细节请读者自行补充完整)

$$\lim_{\rho\to0^+}\frac{1}{\rho^2}\oiint_{\partial B_\rho(P_0)}u(x,y,z)\mathrm{d}S=\frac{1}{\rho^2}\oiint_{\partial B_\rho(P_0)}u(P_0)\mathrm{d}S$$

得

$$\begin{aligned}u(P_0)&=\frac{1}{4\pi\rho^2}\oiint_{\partial B_\rho(P_0)}u(P_0)\mathrm{d}S=\lim_{\rho\to0^+}\frac{1}{4\pi\rho^2}\oiint_{\partial B_\rho(P_0)}u(x,y,z)\mathrm{d}S\\&=\frac{1}{4\pi r^2}\oiint_{\partial B_r(P_0)}u(x,y,z)\mathrm{d}S\\&=\frac{1}{4\pi r^2}\oiint_{\partial B_r(P_0)}u(P)\mathrm{d}S.\end{aligned}$$

□

同时, 调和函数平均值定理的逆命题同样成立, 具体表述如下:

定理 2.3.4. 设函数 u 在 $\overline{\Omega}$ 上有连续的二阶偏导数, 且满足对 $\forall B_r(P_0)\subset\Omega$, 均有

$$u(P_0)=\frac{1}{4\pi r^2}\oiint_{\partial B_r(P_0)}u(x,y,z)\mathrm{d}S.$$

则 u 在 Ω 上满足 $\Delta u=0$.

证明. 因为 $\forall\, 0<\rho\leqslant r, B_\rho(P_0)\subset B_r(P_0)\subset\Omega$, 因此, 若固定 P_0, 则 $\dfrac{1}{4\pi\rho^2}\oiint_{\partial B_\rho(P_0)}u(x,y,z)\mathrm{d}S$ 为常数. 故有

$$\begin{aligned}
0&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\frac{1}{\rho^2}\oiint_{\partial B_\rho(P_0)}u(x,y,z)\mathrm{d}S\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\oiint_{\partial B_1(O)}u(x_0+\rho a,y_0+\rho b,z_0+\rho c)\mathrm{d}S\\
&=\oiint_{\partial B_1(O)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}u(x_0+\rho a,y_0+\rho b,z_0+\rho c)\mathrm{d}S\\
&=\oiint_{\partial B_1(O)}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}(x_0+\rho a,y_0+\rho b,z_0+\rho c)\mathrm{d}S=\frac{1}{\rho^2}\oiint_{\partial B_\rho(P_0)}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}(x,y,z)\mathrm{d}S
\end{aligned}$$

所以

$$\oiint_{\partial B_\rho(P_0)}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}(x,y,z)\mathrm{d}S=0.$$

由 Gauss 公式, 对 $\forall\, 0<\rho\leqslant r$, 有

$$\iiint_{B_\rho(P_0)}\Delta u(x,y,z)\,\mathrm{d}V=\oiint_{\partial B_\rho(P_0)}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}(x,y,z)\,\mathrm{d}S=0.$$

利用 u 的连续性及 P_0,r 的任意性得到, 在 Ω 上 $\Delta u=0$ (细节请读者自行补充完整). □

注. 以下两个关于球的积分变换公式较为常用.

1. **球面上的积分**: (这里 $\boldsymbol{n}$ 是 P 的单位法向量)

$$\oiint_{\partial B_r(P_0)}f(P)\mathrm{d}S=r^2\oiint_{\partial B_1(O)}f(P_0+r\boldsymbol{n})\mathrm{d}S;$$

2. **球体上的积分**:

$$\iiint_{B_r(P_0)}f(P)\mathrm{d}V=\int_0^r\mathrm{d}\rho\left(\oiint_{\partial B_\rho(P_0)}f(P)\mathrm{d}S\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\iiint_{B_r(P_0)}f(P)\mathrm{d}V=\oiint_{\partial B_r(P_0)}f(P)\mathrm{d}S.$$

我们的终极目标是要得到调和函数的 (强) 极值原理:

定理 2.3.5 ((强) 极值原理). 设函数 u 在 Ω 上有连续的二阶偏导数, 且满足 $\Delta u = 0$. 若 u 不是常数, 则它在 $\overline{\Omega}$ 上的最大值和最小值都只能在边界 $\partial\Omega$ 上取到.

证明. 假设 $u(x,y)$ 在 Ω 内 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处取到最大值, 则存在 $r>0$, 使得 $B_r(P_0)\subset\Omega$. 利用**定理 2.3.3** 得

$$u(P_0)=\frac{1}{4\pi r^2}\oiint_{\partial B_r(P_0)}u(x,y,z)\mathrm{d}S.$$

即

$$\frac{1}{4\pi r^2}\oiint_{\partial B_r(P_0)}(u(x_0,y_0,z_0)-u(x,y,z))\mathrm{d}S=0.$$

因为 $u(x_0,y_0,z_0)-u(x,y,z)$ 在 Ω 上非负且连续, 故有

$$u(x_0,y_0,z_0)-u(x,y,z)\Big|_{\partial B_r(P_0)}=0$$

利用**例 2.3.1** 得

$$u(x,y,z)=u(x_0,y_0,z_0),\quad (x,y,z)\in B_r(P_0).$$

对 Ω 内任一点 P, 存在曲线 $\mathit{\Gamma}$, 使得 $\mathit{\Gamma}$ 连接 P_0,P 两点, 且 $\mathit{\Gamma}\in\Omega$. 则存在有限个两两相交的球 $\{B_{r_n}(P_n)\}_{n=0}^N$, 使得 $\mathit{\Gamma}\in\cup_{n=0}^N B_{r_n}(P_n)$ 且 $B_{r_i}(P_i)\subset\Omega$ $(i=0,1,\cdots,N)$. 因此 $u\left(\cup_{n=0}^N B_{r_n}(P_n)\right)=u(P_0)$, 故 $u(P)=u(P_0)$. 由 P 的任意性知, u 在 Ω 上恒为常数, 这与题设条件矛盾.

同理可证, u 在 $\overline{\Omega}$ 上的最小值只能在边界 $\partial\Omega$ 上取到. □

2.4 补充习题

1 设 $\boldsymbol{r}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $r=|\boldsymbol{r}|$, $m,n\in\mathbb{N}^*$, 且 $r\neq 0$, $n\geqslant 2$. 求:

(1) ∇r, Δr;

(2) $\nabla\ln r$, $\Delta\ln r$;

(3) ∇r^{-m}, Δr^{-m}.

解.

$$\begin{aligned}
\nabla r&=\frac{\boldsymbol{r}}{r},\\
\Delta r&=\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}=\frac{1}{r}\nabla\cdot\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}\cdot\nabla\frac{1}{r}=\frac{n}{r}-\boldsymbol{r}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}=\frac{n-1}{r},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\nabla \ln r = \frac{1}{r}\nabla r = \frac{\boldsymbol{r}}{r^2},\\
&\Delta \ln r = \nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^2} = \frac{1}{r^2}\nabla\cdot\boldsymbol{r} + \boldsymbol{r}\cdot\nabla\frac{1}{r^2} = \frac{n}{r^2} - \boldsymbol{r}\cdot\frac{2\boldsymbol{r}}{r^4} = \frac{n-2}{r^2},\\
&\nabla r^{-m} = -\frac{m\boldsymbol{r}}{r^{m+2}},\\
&\Delta r^{-m} = -\nabla\cdot\frac{m\boldsymbol{r}}{r^{m+2}} = -\frac{m}{r^{m+2}}\nabla\cdot\boldsymbol{r} - m\boldsymbol{r}\cdot\nabla\frac{1}{r^{m+2}} = -\frac{mn}{r^{m+2}} + m\boldsymbol{r}\cdot\frac{(m+2)\boldsymbol{r}}{r^{m+4}}\\
&\qquad\quad = \frac{m(m+2-n)}{r^{m+2}}.
\end{aligned}
$$

□

注. 当 $n=2$ 时, 函数 $\ln r$ 是调和函数; 当 $n=m+2$ 时, 函数 r^{-m} 是调和函数.

2 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 是有界闭区域, 其边界 $\partial\Omega$ 为光滑闭曲面, $\boldsymbol{n}$ 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向量. 设光滑函数 u 是 Ω 上的调和函数, 且满足边界条件

$$\left[\alpha u + \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right]\bigg|_{\partial\Omega} = 0,$$

其中 $\alpha\geqslant 0$ 为常数. 证明: u 在 Ω 上恒为零.

证明. 利用第一 Green 恒等式, 我们有

$$
\begin{aligned}
0 &= \oiint_{\partial\Omega}\left(\alpha u^2 + u\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S = \oiint_{\partial\Omega}\alpha u^2\,\mathrm{d}S + \iiint_{\Omega} u\Delta u\,\mathrm{d}V + \iiint_{\Omega}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}V\\
&= \oiint_{\partial\Omega}\alpha u^2\,\mathrm{d}S + \iiint_{\Omega}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}V
\end{aligned}
$$

而 $\alpha u^2\geqslant 0$, $|\nabla u|^2\geqslant 0$, 所以

$$\nabla u = 0,\ u\in\Omega;\quad u\Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

故 u 为常数, 再利用 u 的连续性可得 u 在 Ω 上恒为零. □

3 设 Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 的有界区域, $\partial\Omega$ 是光滑曲面.

(1) 设 $f,g\in C^2(\overline{\Omega})$, 满足 $\Delta f=\Delta g, f\big|_{\partial\Omega}=g\big|_{\partial\Omega}$. 证明: $f=g$.

(2) 设 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$ 是定义在 $\overline{\Omega}$ 上光滑向量场 (二阶偏导数连续), 满足

(a) $\nabla\times\boldsymbol{v}_1=\nabla\times\boldsymbol{v}_2, \nabla\cdot\boldsymbol{v}_1=\nabla\cdot\boldsymbol{v}_2$;

(b) $\boldsymbol{v}_1\big|_{\partial\Omega}=\boldsymbol{v}_2\big|_{\partial\Omega}$.

证明: $\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}_2$.

提示. (1) 同本讲义**例 2.3.1**; (2) 利用 $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{v})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v})-\Delta\boldsymbol{v}$.

4 设 D 是 xy 平面上有限条逐段光滑曲线围成的区域, $f(x,y)$ 在 $\overline{D}$ 上有二阶连续偏导数, 且满足方程

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2a\frac{\partial f}{\partial x}+2b\frac{\partial f}{\partial y}+cf,$$

其中 a,b,c 为常数且 $c\geqslant a^2+b^2$. 求证: 若 f 在 ∂D 上恒为零, 则 f 在 D 上恒为零.

证明. 利用第一 Green 恒等式, 把 $\Delta f=2(a,b)\cdot\nabla f+cf$ 代入得

$$\begin{aligned}0&=\oint_{\partial D} f\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_D (f\Delta f+|\nabla f|^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_D(|\nabla f|^2+2f(a,b)\cdot\nabla f+cf^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_D(|\nabla f+f(a,b)|^2+(c-a^2-b^2)f^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

因为 $c\geqslant a^2+b^2$. 所以 $\nabla f+f(a,b)=0$ 在 D 上恒为零. 即

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=-af,\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=-bf.\end{cases}$$

若存在 x_0, 使得 $f(x_0)\neq 0$, 不妨 $f(x_0)>0$. 由常微分方程的理论知, 存在常数 C, 使得

$$f(x)=\mathrm{e}^{-ax+by+C}\quad x\in\overline{D}.$$

这与 f 在 ∂D 上恒为零矛盾. 所以 f 在 D 上恒为零. □

5 设 D 是平面上由光滑封闭曲线 L 所围的区域, 函数 $f(x,y)$ 在 $\overline{D}$ 上有二阶连续偏导数, 且满足 $\mathrm{e}^y\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\mathrm{e}^x\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$, 并且 f 在 L 上恒为零.

(1) 求证: 存在有连续偏导数的函数 $P(x,y),Q(x,y)$, 使得

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=\mathrm{e}^y\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\mathrm{e}^x\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2,\quad (x,y)\in D;$$

(2) 证明: f 在 D 上恒为零.

提示. (1) 利用 $\mathrm{e}^y\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\mathrm{e}^x\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ 来推断出

$$P(x,y)=-\mathrm{e}^x f\frac{\partial f}{\partial y},\quad Q(x,y)=\mathrm{e}^y f\frac{\partial f}{\partial x}.$$

(2) 利用 Green 公式即可.

6 设 $f(x,y), g(x,y)$ 在单位圆盘 $U = \{(x,y) : x^2+y^2 \leqslant 1\}$ 上有一阶连续偏导数, 且 $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial x}$, 证明: 在单位圆周上存在一点 (ξ,η), 使得 $f(\xi,\eta)\eta = g(\xi,\eta)\xi$.

提示. 利用 Green 公式, 得

$$\begin{aligned}0 &= \iint_U \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \oint_{\partial U} f(x,y)\,\mathrm{d}x + g(x,y)\,\mathrm{d}y \\ &= \oint_{\partial U} (-f(\cos\theta,\sin\theta)\sin\theta + g(\cos\theta,\sin\theta)\cos\theta)\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

再利用积分中值定理即可.

7 设函数 $f(x,y,z)$ 在区域 $\Omega = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leqslant 1\}$ 上具有连续的二阶偏导数, 且满足 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 计算

$$I = \iiint_\Omega \left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

解. 对 $0 < r < 1$, 记球面 $x^2+y^2+z^2 = r^2$ 的法向量为 $\boldsymbol{n} = \dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$, 其中 $\boldsymbol{r} = (x,y,z)$. 则有

$$\begin{aligned}I &= \iiint_\Omega \left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_\Omega \nabla f \cdot \boldsymbol{r}\,\mathrm{d}V \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}r \iint_{x^2+y^2+z^2=r^2} \nabla f \cdot \boldsymbol{r}\,\mathrm{d}S = \int_0^1 r\,\mathrm{d}r \iint_{x^2+y^2+z^2=r^2} \nabla f \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S \\ &= \int_0^1 r\,\mathrm{d}r \iint_{x^2+y^2+z^2\leqslant r^2} \Delta f\,\mathrm{d}V \\ &= \int_0^1 r\,\mathrm{d}r \iint_{x^2+y^2+z^2\leqslant r^2} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

利用球坐标换元:$x = \rho\sin\theta\cos\varphi$, $y = \rho\sin\theta\sin\varphi$, $z = \rho\cos\theta$, 得

$$I = \int_0^1 r\,\mathrm{d}r \iint_{x^2+y^2+z^2\leqslant r^2} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1 r\,\mathrm{d}r \int_0^r \rho^3\,\mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^\pi \sin\theta\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{6}.$$

□

8 设 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 具有二阶连续偏导数, 且对任一点 (x_0,y_0) 为圆心, 任意 $r > 0$ 为半径的半圆 $L : x = x_0 + r\cos\theta$, $y = y_0 + r\sin\theta$ $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$, 恒有

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0,$$

证明: $P(x,y) = 0$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 0$.

证明. 增加线段 $L_0: x_0-r\leqslant x\leqslant x_0+r,\ y=y_0$, 记 L 和 L_0 围成的区域为 D. 利用 Green 公式, 得

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\oint_{L+L_0}P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=\oint_{L_0}P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y.$$
$$=\int_{x_0-r}^{x_0+r}P(x,y_0)\mathrm{d}x.$$

对等式两边分别运用积分中值定理, 存在 $(\xi,\eta)\in D$ 及 $\zeta\in[x-r,x+r]$, 有

$$\frac{\pi r^2}{2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)(\xi,\eta)=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{x_0-r}^{x_0+r}P(x,y_0)\mathrm{d}x=2rP(\zeta,y_0).$$

即

$$P(\zeta,y_0)=\frac{\pi r}{4}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)(\xi,\eta).$$

令 $r\to0$, 则 $\xi,\eta\to(x_0,y_0)$, $\zeta\to x_0$. 再利用连续性可得 $P(x_0,y_0)=0$. 由 x_0,y_0 的任意性知, $P(x,y)=0$ 恒成立, 因此

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)(\xi,\eta)=0.$$

令 $r\to0$, 有

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0)=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)(x_0,y_0)=0.$$

由 x_0,y_0 的任意性知, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y)=0$ 恒成立. □

9 设 $L:(x-1)^2+(y-1)^2=1$, 方向为逆时针方向, $f(x)$ 是一个正值可微函数, 且满足

$$\int_L-\frac{y}{f(x)}\,\mathrm{d}x+xf(y)\,\mathrm{d}y=2\pi$$

求 $f(x)$.

解. 记 L 围成的区域为 D, 利用 Green 公式, 我们有

$$\iint_D\left(f(y)+\frac{1}{f(x)}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_L-\frac{y}{f(x)}\,\mathrm{d}x+xf(y)\,\mathrm{d}y=2\pi.$$

利用 D 的对称性, 同理有

$$\iint_D\left(f(x)+\frac{1}{f(y)}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\pi$$

所以

$$0=\iint_D\left(f(x)+f(y)+\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{f(y)}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-4\pi$$

$$
\begin{aligned}
&= \iint_D \left(f(x) + f(y) + \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f(y)} - 4 \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \iint_D \left(\left(\sqrt{f(x)} - \frac{1}{\sqrt{f(x)}} \right)^2 + \left(\sqrt{f(y)} - \frac{1}{\sqrt{f(y)}} \right)^2 \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

因此

$$
\sqrt{f(x)} - \frac{1}{\sqrt{f(x)}} = 0,
$$

即 $f(x) = 1$. □

10 设 $C: \{(x,y)|F(x,y)=0\}$ 是长度为 l 的简单闭曲线,$D = \{(x,y)|F(x,y)>0\}$ 为 C 围成的区域, $F(x,y)$ 有二阶连续偏导数, 且 $\nabla F \neq 0$. 求

$$
\iint_D \nabla \cdot \left(\frac{\nabla F}{|\nabla F|} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.
$$

解. $\nabla F(x,y)$ 是等值线 C 的法向量, 由 D 的定义可知, $\nabla F(x,y)$ 指向 D 的内部, 即 $\nabla F(x,y)$ 是 C 的内法向量 (细节请读者自行补充完整). 因此

$$
\frac{\nabla F}{|\nabla F|} = \frac{1}{|\nabla F|}(F'_x \boldsymbol{i} + F'_y \boldsymbol{j}).
$$

将其顺时针旋转 $\dfrac{\pi}{2}$ 可得 C 的单位切向量

$$
\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{|\nabla F|}(F'_y \boldsymbol{i} - F'_x \boldsymbol{j}),
$$

方向指向逆时针方向. 现在我们对 $\boldsymbol{\tau}$ 作曲线积分, 一方面

$$
\oint_C \boldsymbol{\tau} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \oint_C \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} \,\mathrm{d}s = \oint_C \mathrm{d}s = l.
$$

另一方面, 利用 Green 公式, 得

$$
\begin{aligned}
\oint_C \boldsymbol{\tau} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \oint_C \frac{1}{|\nabla F|}(F'_y \boldsymbol{i} - F'_x \boldsymbol{j}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_D \left(-\frac{\partial((F'_x/|\nabla F|))}{\partial x} - \frac{\partial((F'_y/|\nabla F|))}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= -\iint_D \nabla \cdot \left(\frac{\nabla F}{|\nabla F|} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

因此

$$
\iint_D \nabla \cdot \left(\frac{\nabla F}{|\nabla F|} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -l.
$$

□

11 已知球体 $\Omega: x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$.

(1) 设 $f(t)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 证明 Poisson 公式:

$$\iint_{\partial\Omega} f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}S = 2\pi\int_{-1}^{1} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}t)\,\mathrm{d}t.$$

(2) 设 $S(k)$ 是平面 $x+y+z=k$ 被球面 $\partial\Omega$ 截下的部分, 且

$$F(x,y,z) = 1-(x^2+y^2+z^2).$$

证明: 当 $|k| \leqslant \sqrt{3}$ 时, 有

$$\iint_{S(k)} F(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \frac{\pi}{18}(3-k^2)^2.$$

(3) 设 $f(t)$ 在 $|t| < \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ 上连续, 证明:

$$\iiint_{\Omega} f\left(\frac{ax+by+cz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{2}{3}\pi\int_{-1}^{1} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}t)\,\mathrm{d}t.$$

证明. (1) 令 $\boldsymbol{n} = \dfrac{a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, 则 $\partial\Omega$ 是单位圆以 $\boldsymbol{n}$ 为旋转轴的旋转曲面. 设 $P(x,y,z)$ 为球面上一点, 则 $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OP}$ 在 $\boldsymbol{n}$ 的投影为 $t = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}$, 绕 $\boldsymbol{n}$ 的旋转半径是

$$\rho = \sqrt{1-t^2}, \quad \mathrm{d}\rho = \frac{-t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}.$$

而面积元

$$\mathrm{d}S = 2\pi\rho\sqrt{(\mathrm{d}t)^2+(\mathrm{d}\rho)^2} = 2\pi\rho\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{d}t.$$

所以

$$\iint_{\partial\Omega} f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}S = \iint_{\partial\Omega} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}t)\,\mathrm{d}S = 2\pi\int_{-1}^{1} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}t)\,\mathrm{d}t.$$

(2) 易知 $S(k)$ 是圆盘, 圆心为 $(\frac{k}{3},\frac{k}{3},\frac{k}{3})$. 取 $(a,b,c)=(1,1,1)$, 按 (1) 中的设法, 可得 $t = \dfrac{k}{\sqrt{3}}$, $\rho = \sqrt{1-\dfrac{k^2}{3}}$. 对 $(x,y,z) \in S(t)$, 设其到 $S(k)$ 圆心的距离为 r, 则有

$$x^2+y^2+z^2 = r^2+\frac{k^2}{3}.$$

而在极坐标下, $S(k)$ 的面积元

$$\mathrm{d}S = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta,\ 0 \leqslant r \leqslant \rho,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

因此

$$\begin{aligned}
\iint_{S(k)} F(x,y,z)\,\mathrm{d}S &= \iint_{S(k)} \left(1 - \left(r^2 + \frac{k^2}{3}\right)\right) \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{1-\frac{k^2}{3}}} \left(1 - \left(r^2 + \frac{k^2}{3}\right)\right) \mathrm{d}r \\
&= \frac{\pi}{18}(3-k^2)^2.
\end{aligned}$$

(3) 令

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta,\quad 0 \leqslant r \leqslant 1,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

则

$$\begin{aligned}
\iiint_\Omega f\left(\frac{ax+by+cz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^1 r^2\,\mathrm{d}r \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi f(a\sin\theta\cos\varphi, b\sin\theta\sin\varphi, c\cos\theta)\sin\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi f(a\sin\theta\cos\varphi, b\sin\theta\sin\varphi, c\cos\theta)\sin\theta \\
&= \frac{1}{3}\iint_{\partial\Omega} f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}S \\
&= \frac{2}{3}\pi\int_{-1}^1 f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}t)\,\mathrm{d}t\ (\text{Poisson 公式}).
\end{aligned}$$

□

3 Fourier 分析

本章我们主要研究 Fourier 级数有关渐进及收敛的性质. 由于我目前倾向于概率方向的研究, 尤其最近对概率极限理论中的渐进性质和收敛速度较为感兴趣, 故在本讲义中选取 Fourier 级数的渐进及收敛的性质作为选讲. 如果想深入系统掌握 Fourier 分析这部分的话，可以参考《**Elias M. Stein: Fourier Analysis, an Introduction**》这本书的第 2-6 章. 这本书里补充了一些万能工具 (比如好核函数, 逼近恒等 等), 以及习题部分也有很多重要的例子. 这些内容在后续数学专业课程 (主要是分析与微分方程部分) 中会经常用到.

3.1 利用 Fourier 级数求数项级数和

在 Fourier 分析中, 求数项级数和问题一般有如下 3 种方法:

1. 直接或者通过奇/偶延拓后对函数展开为 Fourier 级数, 取某个特定点后得到该数项级数;
2. 对展开后的 Fourier 级数逐项求导或积分, 从而得到新的函数项级数. 之后再取某个特定点来得到该数项级数;
3. 展开成 Fourier 级数后利用 Parseval 等式, 得到该数项级数.

例 3.1.1. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi-1}{2}x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \dfrac{\pi-x}{2}, & 1<x\leqslant\pi.\end{cases}$$

证明:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n}{n^2}\sin nx,\ (|x|\leqslant\pi)$$

并求

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n}{n},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\sin n}{n}\right)^2,\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2 n}{n^4}.$$

证明. 将 $f(x)$ 奇延拓至 $(-\pi,0]$, 有

$$\begin{aligned}
a_n&=0;\\
b_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{\pi-1}{2}x\sin nx\,\mathrm{d}x+\frac{2}{\pi}\int_1^2\frac{\pi-x}{2}\sin nx\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{\pi-1}{\pi}\left(-\frac{\cos n}{n}+\frac{\sin n}{n^2}\right)+\frac{\cos n-(-1)^n}{n}+\frac{\pi(-1)^n-\cos n}{n\pi}+\frac{\sin n}{n^2\pi}\\
&=\frac{\sin n}{n^2}.
\end{aligned}$$

因为 $f(x)$ 连续且分段可微, 所以

$$f(x)=\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{\sin n}{n^2}\sin nx,\quad |x|\leqslant\pi.$$

令 $x=1$, 可得

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\sin n}{n}\right)^2=f(1)=\frac{\pi-1}{2}.$$

对 $f(x)$ 进行逐项求导, 得

$$f'(x)=\sum_{m=1}^{+\infty}\left(\frac{\sin n}{n^2}\sin nx\right)'=\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{\sin n}{n}\cos nx,\quad x\in(-1,1)$$

令 $x=0$, 可得

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n}{n}=f'(0)=\frac{\pi-1}{2}.$$

对 $f(x)$ 的 Fourier 级数利用 Parseval 等式, 得

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2 n}{n^4}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x=\frac{(\pi-1)^2}{6}.$$

□

3.2 Fourier 系数的渐进性质

我们先给出标准形式的 Riemann-Lebesgue 引理:

引理 3.2.1 (Riemann-Lebesgue 引理). 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的 Riemann 可积函数, 则

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x=0,\qquad \lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x=0.$$

证明. 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 故对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $[a,b]$ 的一个分割 $T:a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$. 使得 $\sum\limits_{k=1}^{n}w_k(f)\Delta x_k<\frac{\varepsilon}{2}$. 其中 $w_k(f)$ 是 $f(x)$ 在区间 $[x_{k-1},x_k]$ 上的振幅. 记 M 是 $|f(x)|$ 的一个上界, 当 $\lambda>\frac{4nM}{\varepsilon}$ 时, 有

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n}\int_{x_k}^{x_{k+1}}(f(x)-f(x_k)+f(x_k))\sin\lambda x\,\mathrm{d}x\right|\\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n}\int_{x_k}^{x_{k+1}}|f(x)-f(x_k)|\,\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)|\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}}\sin\lambda x\,\mathrm{d}x\right|\\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n}w_k(f)\Delta x_k+M\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\cos\lambda x_{k+1}-\cos\lambda x_k}{\lambda}\right|\\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n}w_k(f)\Delta x_k+\frac{2Mn}{\lambda}\\
&< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon
\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x=0$. 同理可证: $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x=0$. □

首先我们先给出一个常用推论:

推论 3.2.2. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数且在 $[-\pi,\pi]$ 上分段可微, $f'(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积且绝对可积, 记 $f(x)\sim\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, 则有

$$f'(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}(nb_n\cos nx-na_n\sin nx)$$

即若用 a_n',b_n' 表示 $f'(x)$ 的 Fourier 系数, 则有

$$a_0'=0,\quad a_n'=nb_n,\quad b_n'=-na_n,\quad n\in\mathbb{N}^*$$

证明. 利用 $f(-\pi)=f(\pi)$, 先推出 $a_0'=0$, 再利用分部积分公式得

$$a_n'=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f'(t)\cos nt\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}f(t)\cos nt\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t=\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t=nb_n,$$
$$b_n'=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f'(t)\sin nt\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}f(t)\sin nt\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t=\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t=-na_n.$$

□

同时, 教材**推论 12.6** 中给出了 $f(x)$ 的 Fourier 系数的渐进性质, 其中绝对可积代替推论条件中的平方可积, 可以直接由 Riemann-Lebesgue 引理推得, 具体如下:

命题 3.2.1. 设 $f(x)$ 为周期 2π 的可积且绝对可积函数, 则 $f(x)$ 的 Fourier 系数满足

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=0,$$
$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=0.$$

利用**推论 3.2.2** 和 **命题 3.2.1**, 并反复运用分部积分, 可以得到:

命题 3.2.2. 设 $f(x)$ 为周期 2π 的函数且在 $[-\pi,\pi]$ 上分段可微, 如果其 k 阶导数 $f^{(k)}(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续, 其 $k+1$ 阶导数 $f^{(k+1)}(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积且绝对可积, 则有

$$a_n=o\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right),\quad b_n=o\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right).$$

我们还发现, 若周期函数 $f(x)$ 满足 α 阶 Lipschitz 条件, 则其 Fourier 系数和 $-\alpha$ 同阶:

命题 3.2.3. 设 $f(x)$ 为周期 2π 的函数且存在 $\alpha \in (0,1]$, 使得 $f(x)$ 满足 α 阶 Lipschitz 条件:

$$|f(x)-f(y)| \leqslant M|x-y|^{\alpha},$$

其中 $M>0$ 为常数, 则有

$$a_n = O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right), \quad b_n = O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right).$$

证明. 由题设知, $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续, 故 $f(x)$ 存在 Fourier 系数

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \,\mathrm{d}x, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \,\mathrm{d}x.$$

把 x 替换成 $x+\dfrac{\pi}{n}$ 后, 有

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-\frac{\pi}{n}}^{\pi-\frac{\pi}{n}} f(x+\frac{\pi}{n})\cos(nx+\pi)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\frac{\pi}{n})\cos nx\,\mathrm{d}x.$$

将上述关于 a_n 的两个表达式取平均后, 得

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\right)\cos nx\,\mathrm{d}x.$$

下面我们对 $|a_n|$ 进行估计:

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x)-f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\right|\cdot|\cos nx|\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2\pi}M\left(\frac{\pi}{n}\right)^{\alpha}\int_{-\pi}^{\pi}|\cos nx|\,\mathrm{d}x \leqslant M\left(\frac{\pi}{n}\right)^{\alpha}.$$

故 $a_n = O\left(\dfrac{1}{n^{\alpha}}\right)$. 同理 $b_n = O\left(\dfrac{1}{n^{\alpha}}\right)$. □

3.3 Fourier 级数的一致收敛性与收敛速度

回顾 **Dirichlet 核**的定义:

$$D_n(t) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

在教材中我们已给出了函数 $f(x)$ 的 Fourier 级数的部分和 $S_n(x)$ 的积分 (称为 **Dirichlet 积分**) 表示:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

以下两个有关 Dirichlet 核的恒等式 (第一个在教材中有) 请读者自行验证:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,\mathrm{d}t = 1, \quad \sum_{k=0}^{n} D_k(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2.$$

教材中的 Dirichlet 定理给出了: 如果周期函数 $f(x)$ 是连续且分段可微的, 则 $f(x)$ 的 Fourier 级数在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛于 $f(x)$. 现在我们在较强条件下讨论 Fourier 级数的一致收敛性, 并给出收敛速度的估计. 我们发现, 在 $f\in C^2$, $f\in C^1$ 这两个不同条件下有着不同的收敛速度.

定理 3.3.1. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的 C^2 函数, $f(x)$ 的 Fourier 级数的部分和为 $S_n(x)$, 则有

$$S_n - f(x) = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n\to\infty.$$

从而 $S_n(x)$ 一致收敛于 $f(x)$.

证明. 利用 S_m 的 Dirichlet 积分表示, 我们有

$$S_n - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x-t)-f(x))D_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x-t)-f(x)}{\sin\frac{t}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t.$$

对 $x,t\in[-\pi,\pi]$, 定义

$$g(x,t)=\begin{cases}\dfrac{f(x-t)-f(x)}{\sin\frac{t}{2}}, & t\neq 0,\\ -2f'(x), & t=0.\end{cases}$$

因为 $f\in C^2$, 固定 $x\in[-\pi,\pi]$, 则 $g_x(t):=g(x,t)$ 是 $[-\pi,\pi]$ 上的 C^1 函数, 且有

$$\frac{\mathrm{d}g_x}{\mathrm{d}t}(0) = f''(x) = \lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{d}g_x}{\mathrm{d}t}(t).$$

同时对固定 $t\in[-\pi,\pi]$, $g_t'(x) := \dfrac{\partial g}{\partial t}(x,t)$ 是 $[-\pi,\pi]$ 上的连续函数, 故 $\dfrac{\partial g}{\partial t}(x,t)$ 在 $[-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]$ 上连续. 故存在 $M>0$, 使得

$$\left|\frac{\partial g}{\partial t}(x,t)\right| \leqslant M.$$

利用分部积分, 得:

$$S_n - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x,t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial g}{\partial t}(x,t)\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{n+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

故有

$$|S_n - f(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\partial g}{\partial t}(x,t)\right|\frac{|\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t|}{n+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{M}{n+\frac{1}{2}} < \frac{M}{n}.$$

□

注. 若 $f(x)$ 是周期为 2π 的 $C^k\,(k\geqslant 2)$ 函数, 通过作 $k-1$ 次分部积分后可以证明

$$S_n - f(x) = O\left(\frac{1}{n^{k-1}}\right), \quad n\to\infty.$$

定理 3.3.2. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的 C^1 函数, $f(x)$ 的 Fourier 级数的部分和为 $S_n(x)$, 则有

$$S_n - f(x) = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad n\to\infty.$$

从而 $S_n(x)$ 一致收敛于 $f(x)$.

分析. 我们把积分区间 $[-\pi,\pi]$ 分成 $|t|\leqslant\delta$ 和 $\delta\leqslant|t|\leqslant\pi$ 两部分分别估计. 前者直接估计, 后者利用分部积分估计.

证明. $g(x,t)$ 定义同上. 待定 $\delta>0$, 我们有

$$S_n - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x,t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\delta}+\int_{-\delta}^{\delta}+\int_{\delta}^{\pi}\right) g(x,t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t.$$

因为 $f\in C^1$, 固定 $x\in[-\pi,\pi]$, 则 $g_x(t):=g(x,t)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续. 且存在 $M>0$, 使得 $\sup\limits_{x\in[-\pi,\pi]}|f'(x)|\leqslant M$. 利用微分中值定理, 我们有 ($\vee$ 表示取两者的最大值)

$$|g(x,t)| \leqslant \left|\frac{f(x-t)-f(x)}{\sin\frac{t}{2}}\right| \vee |2f'(x)| \leqslant \left|\frac{tf'(y)}{\sin\frac{t}{2}}\right| \vee |2f'(x)| \leqslant \pi M \leqslant 4M.$$

所以

$$\left|\int_{-\delta}^{\delta} g(x,t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{-\delta}^{\delta}|g(x,t)|\,\mathrm{d}t \leqslant 8\delta M.$$

因为 $g_x(t)$ 是 $[\delta,\pi]$ 上的 C^1 函数, 故有

$$g_x'(t) = -\frac{f'(x-t)}{\sin\frac{t}{2}} - \frac{\cos\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}g_x(t).$$

利用 $|g_x(t)|\leqslant 4M$ 及 $\sin\dfrac{t}{2}\geqslant\dfrac{\delta}{4}$, 得

$$|g_x'(t)| \leqslant \left(\frac{4}{\delta}+\frac{4}{2\delta}\cdot 4\right)M = \frac{12}{\delta}M.$$

再利用分部积分, 我们有

$$\left|\int_{\delta}^{\pi} g_x(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t\right| = \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\left|g_x(\delta)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi + \int_{\delta}^{\pi} g_x'(t)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t\right|$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \frac{1}{n}\left(|g(\delta)|+\int_{\delta}^{\pi}|g_x'(t)|\,\mathrm{d}t\right)\\
&\leqslant \frac{1}{n}\left(\frac{48}{\delta}+4\right)M.
\end{aligned}
$$

类似, 有

$$
\left|\int_{-\pi}^{\delta} g_x(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{n}\left(\frac{48}{\delta}+4\right)M.
$$

取 $\delta=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, 则存在常数 $C>0$, 使得

$$
\begin{aligned}
|S_n-f(x)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\delta}+\int_{-\delta}^{\delta}+\int_{\delta}^{\pi}\right)g(x,t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t\right|\\
&\leqslant \left(8\delta+\frac{2}{n}\left(\frac{48}{\delta}+4\right)\right)M\\
&\leqslant \frac{C}{\sqrt{n}}.
\end{aligned}
$$

□

3.4 Fourier 级数 Cesàro 和的收敛性

下面我们考虑 Fourier 级数 Cesàro 求和的收敛性.

设 $S_n(x)$ 是函数 $f(x)$ 的 Fourier 级数的部分和, 我们定义算术平均值数列

$$
\sigma_n(x)=\frac{S_1(x)+S_2(x)+\cdots+S_n(x)}{n},\ n\in\mathbb{N}^*,
$$

$\sigma_n(x)$ 称为 $S_n(x)$ 的 **Cesàro 求和**.

在数学分析 (B1) 中, 我们已经证明: 如果对固定的 x, $\{S_n(x)\}$ 收敛, 则 $\{\sigma_n(x)\}$ 亦收敛. 同时我们也举了逆命题不成立的反例. 这说明 “$\{\sigma_n(x)\}$ 收敛” 比 “$\{S_n(x)\}$ 收敛” 要弱.

同时, 教材里的 Dirichlet 定理中, 若满足函数 $f(x)$ 的 Fourier 级数的一致收敛性, 除了要求 $f(x)$ 是周期且连续的之外, 还要求 $f(x)$ 是分段可微的. 现在我们并不在周期且连续的函数上加条件, 而是改进收敛的定义, 使得 $f(x)$ 的 Fourier 级数在新收敛的定义下仍然满足一致收敛性. 而 Cesàro 求和意义下的收敛比原收敛条件要弱, 因此我们探究: 在没有分段可微条件下, $f(x)$ 的 Fourier 级数在 Cesàro 求和意义下是否仍满足一致收敛性?

我们先做些准备工作: 利用 Dirichlet 积分, 我们可以将 Cesàro 求和表示为卷积形式:

$$
\sigma_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)K_n(x-t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)K_n(t)\,\mathrm{d}t.
$$

其中

$$K_n(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}D_k(x)=\frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2.$$

被称为积分的 **Fejér 核**.

我们证明 Fejér 核 $K_n(x)$ 满足以下三条性质 (一般我们称为好的积分核):

1. $f_n(x)\geqslant 0$,
2. $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(x)\,\mathrm{d}x=1$,
3. 对任意 $\delta>0$, $\lim\limits_{n\to\infty}K_n(x)=0$ 对任意的 $|x|\in[\delta,\pi]$ 一致成立.

其中性质 1 显然成立, 性质 2 可由 $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_n(t)\,\mathrm{d}t=1$ 直接推得. 同时对任意 $\delta>0$, 有

$$|K_n(x)|\leqslant\frac{1}{2(n+1)}\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}\leqslant\frac{1}{2(n+1)}\frac{1}{\sin^2\frac{\delta}{2}}\xrightarrow{n\to\infty}0$$

来推得性质 3.

下面我们来证实猜想:

定理 3.4.1 (**Fejér 定理**). 设 $f(x)$ 为周期 2π 的连续函数, 则函数 $f(x)$ 的 Fourier 级数在 Cesàro 求和意义下一致收敛于 $f(x)$, 即 $\sigma_n(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

由 $f(x)$ 的连续性和周期性可知, 存在 $M>0$, 使得 $|f(x)|\leqslant M$, 以及 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续, 即对任意 $\varepsilon>0$ 及 $x\in\mathbb{R}$, 存在 $\delta>0$, 当 $|t|\leqslant\delta$ 时, 有

$$|f(x)-f(x-t)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

利用

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)K_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

及 Fejér 核 $K_n(x)$ 的上述性质 2, 得

$$|\sigma_n(x)-f(x)|=\frac{1}{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}(f(x-t)-f(x))K_n(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-t)-f(x)|K_n(t)\,\mathrm{d}t$$

一方面,

$$\int_{-\delta}^{\delta}|f(x-t)-f(x)|K_n(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\int_{-\delta}^{\delta}K_n(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\varepsilon}{2}.$$

另一方面, 利用 Fejér 核 $K_n(x)$ 的上述性质 3, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 当 $n > N$ 时, 对任意 $\delta \leqslant |x| \leqslant \pi$ 均有 $|K_n(x)| < \dfrac{\varepsilon}{8\pi M}$. 故有

$$\int_{\delta \leqslant |x| \leqslant \pi} |f(x-t) - f(x)| K_n(t) \, \mathrm{d}t \leqslant 2M \int_{\delta \leqslant |x| \leqslant \pi} K_n(t) \, \mathrm{d}t < 2M \cdot 2\pi \cdot \frac{\varepsilon}{8\pi M} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

因此

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)| K_n(t) \, \mathrm{d}t < \varepsilon.$$

即 $\sigma_n(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

3.5 补充习题

1 利用 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$, 计算高斯函数 $f(x) = \mathrm{e}^{-ax^2} (a > 0)$ 的 Fourier 变换.

解. $f'(x) = -2axf(x)$, $f(x), f'(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上绝对可积. 利用 Fourier 变换的微分性质, 得

$$\mathrm{i}\lambda F[f(x)](\lambda) = F[f'(x)](\lambda) = F[-2axf(x)](\lambda) = -2a\mathrm{i}F[-\mathrm{i}xf(x)](\lambda) = -2a\mathrm{i}(F[f(x)](\lambda))'$$

即

$$(F[f(x)](\lambda))' = -\frac{\lambda}{2a} F[f(x)](\lambda)$$

解得

$$F[f(x)](\lambda) = C\mathrm{e}^{-\frac{\lambda^2}{4a}}.$$

而

$$C = F[f(x)](0) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-a\xi^2} \, \mathrm{d}\xi = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

所以

$$F[f(x)](\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \mathrm{e}^{-\frac{\lambda^2}{4a}}.$$

□

2 设函数 $f(x) = \dfrac{\pi}{2} - x$, $x \in [0, \pi]$.

(1) 将 $f(x)$ 展开成余弦级数;

(2) 求数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ 的和.

解. (1) 将函数 $f(x)$ 偶延拓到 $[-\pi,\pi]$ 上, 则

$$\begin{aligned}
a_0 &= \int_0^\pi \left(\frac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{d}x = 0;\\
a_n &= \int_0^\pi \left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{n^2\pi}(1-(-1)^n);\\
b_n &= 0.
\end{aligned}$$

因此

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^\infty \frac{4}{\pi(2n-1)^2}\cos(2n-1)x.$$

(2) 对上式令 $x=0$, 有

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

及

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3}\left(\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n)^2}\right) = \frac{4}{3}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

对 Fourier 级数利用 Parseval 等式, 得

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{16}{\pi^2(2n-1)^4} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{6}.$$

所以

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

因此

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4} = \frac{16}{15}\left(\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4} - \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n)^4}\right) = \frac{16}{15}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

□

3 级数

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin nx}{n^2}$$

是否是某个在 $[-\pi,\pi]$ 上可积且平方可积函数的 Fourier 级数?

提示. 是. 利用 $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leqslant \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} < +\infty$ 即可.

4 设 L 是平面上光滑的简单闭曲线, 其参数方程表示为 $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$. L 的方向与参数 t 增加的方向一致. 证明: L 围成的区域面积 F 等于

$$\pi\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n d_n - b_n c_n),$$

其中 (a_n,b_n) 是 $\varphi(t)$ 的 Fourier 系数, (c_n,d_n) 是 $\psi(t)$ 的 Fourier 系数.

提示. 解答可以在本讲义 **2.2 节**等周定理的证明 (Hurwitz) 中找到.

5 设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上 Riemann 可积, 且以 2π 为周期, 存在 $M>0$, 使得 $|f(x)|\leqslant M$. 证明: 存在常数 $A>0$, 使得

$$|S_n(x)|\leqslant AM\ln n,\ (n\geqslant 2)$$

这里 $S_n(x)$ 是 $f(x)$ 的 Fourier 级数部分和.

证明. 利用 $\sin x\geqslant \dfrac{2}{\pi}x\,(x\in[0,\dfrac{\pi}{2}])$, 我们有

$$\begin{aligned}
|S_n(x)| &\leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}|f(x+t)+f(x-t)|\left|\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\right|\mathrm{d}t \leqslant \frac{2M}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\right|\mathrm{d}t \\
&\leqslant M\int_0^{\pi}\left|\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t}\right|\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

取 $\delta=\dfrac{1}{n+\frac{1}{2}}$, 有

$$\begin{aligned}
|S_n(x)| &\leqslant M\left(\int_0^{\delta}\left|\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t}\right|\mathrm{d}t+\int_{\delta}^{\pi}\left|\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t}\,\mathrm{d}t\right|\right) \\
&\leqslant M\left(\int_0^{\delta}\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t}+\int_{\delta}^{\pi}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= M+M\ln\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right) \\
&\leqslant 5M\ln n.
\end{aligned}$$

$\square$

6 温和函数及其 Fourier 变换 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 连续且满足: 存在常数 $A>0$, 对任意 $x\in\mathbb{R}$, 有

$$|f(x)|\leqslant\frac{A}{x^2+1}.$$

我们称满足上述条件的 $f(x)$ 是温和函数 **(moderate decrease)**.

(1) 证明: $f(x)$ 的 Fourier 变换 $\tilde{f}(u)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ut}\,\mathrm{d}t$ 是存在的;

(2) 证明: 函数项级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\tilde{f}(n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx},\qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty}f(x+2n\pi)$$

在 $\mathbb{R}$ 上内闭一致收敛, 且这两个函数项级数相等 (**Poisson 求和公式**).

(3) 设 $\tilde{f}(u)$ 连续, 且存在常数 $0<\alpha<1$, 当 $|u|\to\infty$ 时, 有

$$\tilde{f}(u)=O\left(\frac{1}{|u|^{1+\alpha}}\right).$$

证明: 存在常数 $M>0$, 对任意 $x,h\in\mathbb{R}$, 有

$$|f(x+h)-f(x)|\leqslant M|h|^{\alpha}.$$

证明. (1) 利用

$$|\tilde{f}(u)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)||\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ut}|\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{A}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t=\frac{A}{2\pi}\arctan t\Big|_{-\infty}^{+\infty}<+\infty.$$

即可.

(2) 对任意的闭区间 M, 存在 $N\in\mathbb{N}^*$, 使得 $M\subset[-2N\pi,2N\pi]$. 对任意 $x\in M$, 有

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\tilde{f}(n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}|\leqslant\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{A}{1+n^2}\leqslant+\infty,\\
&\sum_{n=-\infty}^{\infty}|f(x+2n\pi)|=\sum_{n=-N}^{N}|f(x+2n\pi)|+\sum_{n=-\infty}^{-N-1}|f(x+2n\pi)|+\sum_{n=N+1}^{\infty}|f(x+2n\pi)|\\
&\qquad\leqslant(2N+1)A+\sum_{n=-\infty}^{-N-1}\frac{A}{1+(x+2n\pi)^2}+\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{A}{1+(x+2n\pi)^2}\\
&\qquad\leqslant(2N+1)A+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A}{1+4n^2\pi^2}<+\infty.
\end{aligned}$$

利用 Weierstrass 判别法可知, 函数项级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\tilde{f}(n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx},\qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty}f(x+2n\pi)$$

在 $\mathbb{R}$ 上内闭一致收敛. 同时, 对任意 $m\in\mathbb{Z}$, 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(x+2n\pi)\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}mu}\,\mathrm{d}u&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi}f(x+2n\pi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}mu}\,\mathrm{d}u\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}mu}\,\mathrm{d}u\\&=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}mu}\,\mathrm{d}u\\&=\tilde{f}(m).\end{aligned}$$

其中 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|\tilde{f}(n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}|<+\infty$ 保证求和次序可交换. 故 Poisson 求和公式:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\tilde{f}(n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(x+2n\pi).$$

成立.

(3) 由题意知, $\exists K,M_1>0$, 使得当 $|u|>K$ 时, 有 $|\tilde{f}(u)|\leqslant\dfrac{M_1}{|u|^{1+\alpha}}$. 并有

$$\begin{aligned}|f(x+h)-f(x)|&=\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{f}(u)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+h)u}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}xu})\,\mathrm{d}u\right|\\&\leqslant\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{f}(u)(\cos(x+h)u-\cos xu)\,\mathrm{d}u\right|+\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{f}(u)(\sin(x+h)u-\sin xu)\,\mathrm{d}u\right|\end{aligned}$$

我们仅需考察

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{f}(u)(\cos(x+h)u-\cos xu)\,\mathrm{d}u\right|=2\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{f}(u)\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)u\cdot\sin\frac{h}{2}u\,\mathrm{d}u\right|$$

取 $\delta=\max\{1,K\}$, 因为 $\tilde{f}(u)$ 连续, 故存在 $M_2>0$, 使得当 $u\in[-\delta,\delta]$ 时, 有 $|\tilde{f}(u)|\leqslant M_2$. 若 $h\geqslant\dfrac{1}{\delta}$, 则

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{f}(u)\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)u\cdot\sin\frac{h}{2}u\,\mathrm{d}u\right|&\leqslant\left|\int_{-\delta}^{\delta}M_2\,\mathrm{d}u\right|+2\left|\int_{\delta}^{\infty}\frac{M_1}{|u|^{1+\alpha}}\,\mathrm{d}u\right|\\&\leqslant 2M_2\delta+2\alpha\frac{M_1}{\delta^{\alpha}}\leqslant\left(2M_2\delta^{1+\alpha}+2\alpha M_1\right)h^{\alpha}\end{aligned}$$

若 $0<h<\dfrac{1}{\delta}$, 取

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{f}(u)\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)u\cdot\sin\frac{h}{2}u\,\mathrm{d}u\right|\\
&\quad\leqslant 2\left|\int_0^{\delta}M_2\cdot\sin\frac{h}{2}u\,\mathrm{d}u\right|+2\left|\int_{\delta}^{\frac{1}{h}}\frac{M_1}{|u|^{1+\alpha}}\cdot\sin\frac{h}{2}u\,\mathrm{d}u\right|+2\left|\int_{\frac{1}{h}}^{\infty}\frac{M_1}{|u|^{1+\alpha}}\,\mathrm{d}u\right|\\
&\quad\leqslant 2\left|\int_0^{\delta}M_2\cdot\frac{h}{2}u\,\mathrm{d}u\right|+2\left|\int_{\delta}^{\frac{1}{h}}\frac{2M_1h}{|u|^{\alpha}}\,\mathrm{d}u\right|+2\left|\int_{\frac{1}{h}}^{\infty}\frac{M_1}{|u|^{1+\alpha}}\,\mathrm{d}u\right|\\
&\quad\leqslant\frac{M_2\delta^2}{2}h+\frac{4M_1}{1-\alpha}h^{\alpha}+\frac{2M_1}{\alpha}h^{\alpha}\\
&\quad\leqslant\left(\frac{M_2\delta^2}{2}+\frac{4M_1}{1-\alpha}+\frac{2M_1}{\alpha}\right)h^{\alpha}\ (0<h<1)
\end{aligned}$$

同理, 在 $h\leqslant 0$ 时上式亦成立. 取 $M_3=\max\left\{2M_2\delta^{1+\alpha}+2\alpha M_1,\dfrac{M_2\delta^2}{2}+\dfrac{4M_1}{1-\alpha}+\dfrac{2M_1}{\alpha}\right\}$, 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{f}(u)(\cos(x+h)u-\cos xu)\,\mathrm{d}u\leqslant M_3|h|^{\alpha}$$

类似可得, 存在 $M_4>0$, 使得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{f}(u)(\sin(x+h)u-\sin xu)\,\mathrm{d}u\leqslant M_4|h|^{\alpha}$$

取 $M=M_3+M_4$, 有

$$|f(x+h)-f(x)|\leqslant M|h|^{\alpha}.$$

□

注. 易知温和函数在 $\mathbb{R}$ 上绝对可积. 对于温和函数 f,g 还有如下性质 (请读者自行验证):

1. **(线性性)** 对 $a,b\in\mathbb{R}$, 有

$$\int_{-\infty}^{\infty}(af(x)+bg(x))\,\mathrm{d}x=a\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x+b\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. **(平移不变性)** 对 $a\in\mathbb{R}$, 有

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-a)\,\mathrm{d}x$$

3. **(尺度变换)** 对 $\delta \in \mathbb{R}$, 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \delta \int_{-\infty}^{\infty} f(\delta x)\,\mathrm{d}x$$

4. **(平均连续性)** 当实数 $a \to 0$ 时, 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f(x-a)|\,\mathrm{d}x \to 0.$$

7　定义 Legendre 多项式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

并回答下列问题:

(1) $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ 在区间 $[-1,1]$ 上构成一个正交函数系;

(2) $y = P_n(x)$ 是方程

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + n(n-1)y = 0$$

的解;

(3) $P_n(x)$ 满足如下递推式:

$$\begin{aligned}
(n+1)P_{n+1}(x) &= (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x),\\
\frac{x^2-1}{n}\frac{\mathrm{d}P_n(x)}{\mathrm{d}x} &= xP_n(x) - P_{n-1}(x),\\
(2n+1)P_n(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)).
\end{aligned}$$

注. 反复利用分部积分, 利用递推思想, 感兴趣者可以自行尝试验证. 这题的结论非常重要, 值得留意.

4　写在最后

学无止境, 知识是没有边界的, 也不可能指望一口气能在大学期间就把某门学科的知识全部掌握. 数学家们两三百年的心血凝聚为同学们四年的学习, 要说东西不多不难那是不可能的. 比学习知识更重要的, 是在学习知识的过程中获取其中的**智慧**, 这需要通过平日的**感悟**、**思考**来转化. 希望大家在求知的过程中也要学会多感悟, 努力做到拥有智慧的材人.